Ondas

Jaime Villate, FEUP, Outubro de 2005

1 Descrição matemática das ondas

Uma onda é uma perturbação que se propaga num meio. Por exemplo, uma onda que se propaga numa corda ou o som que se propaga no ar. A figura 1 mostra uma onda que se propaga para a direita, com velocidade v, numa corda.

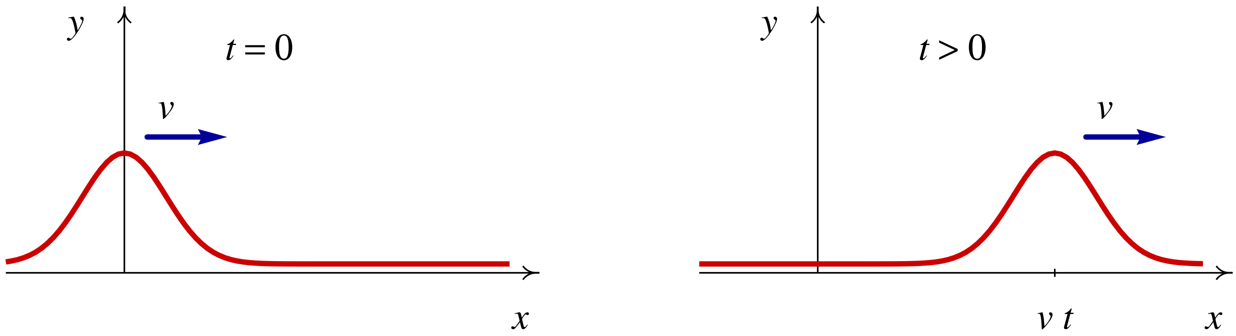


Figura 1: Onda numa corda.

No instante $t = 0$, a forma da corda é dada por uma função:

$$y = f(x)$$

um tempo t mais tarde, a função é a mesma mas deslocada vt no sentido de propagação da onda:

$$y = f(x - vt) \tag{1}$$

As funções com a forma $f(x - vt)$ representam ondas que se deslocam no sentido positivo do eixo dos x, com velocidade v. Se a onda se deslocar no sentido negativo do eixo dos x, a função de onda terá a forma $f(x + vt)$. A função de onda é uma função de duas variáveis: a variável x que define a direcção de propagação e o tempo t. A velocidade v tem um valor constante que depende das propriedades do meio onde a onda se propaga. A velocidade da onda na corda depende do valor da tensão da corda e da sua massa por unidade de comprimento; quanto maior for a tensão, maior será a velocidade. E a velocidade é menor para cordas com mais massa por unidade de comprimento.

No caso da onda na corda, o valor da função f corresponde ao deslocamento da corda, na direcção do eixo dos y. No caso de outras ondas, a função f pode representar outras grandezas físicas. Por exemplo, imagine um cilindro comprido, preenchido com um gás explosivo. Se em algum instante o gás no centro da coluna explode, a pressão nessa região aumentará. Na figura 2 a cor azul representa zonas de maior pressão.

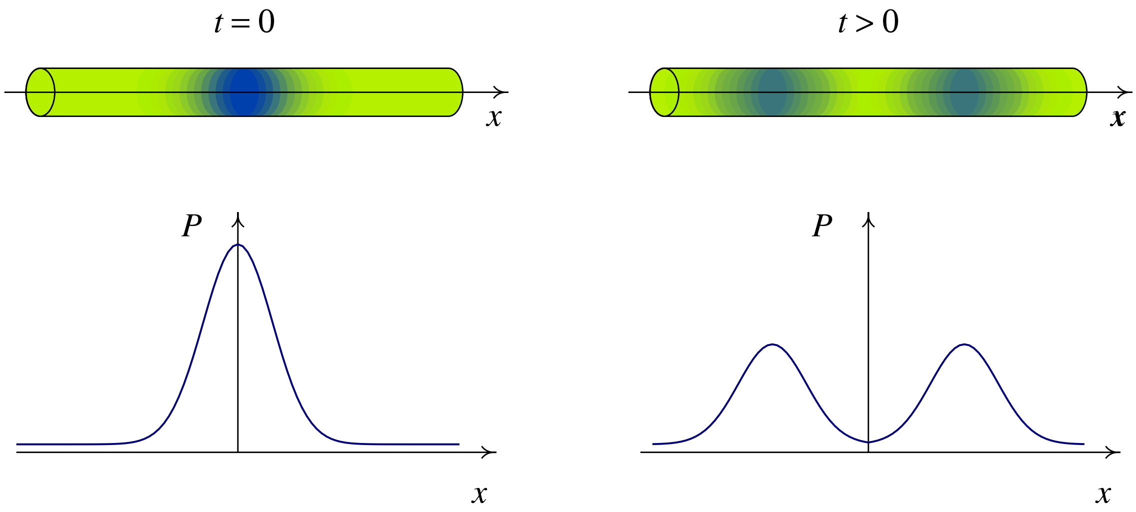


Figura 2: Onda de pressão numa coluna de gás.

No instante inicial $t = 0$, a pressão P, em função da distância x ao longo da coluna é dada por uma função f:

$$P = f(x)$$

num instante $t > 0$, a onda ter-se-á deslocado nos dois sentidos, e a pressão será:

$$P(x,t) = \frac{f(x+vt) + f(x-vt)}{2} \tag{2}$$

$f(x - vt)/2$ corresponde a uma onda com velocidade v no sentido positivo, e $f(x + vt)/2$ é uma onda com velocidade v no sentido negativo.

Esse tipo de ondas são ondas **longitudinais**, pois o aumento da pressão corresponde ao deslocamento das partículas na mesma direcção x de propagação da onda. A onda na corda (figura 1) é um exemplo de onda **transversal**, pois o deslocamento da corda é na direcção y, perpendicular ao sentido de deslocamento da onda.

Outro exemplo de ondas são as ondas electromagnéticas. Nesse caso a grandeza física que a função de onda representa é o valor dos campos eléctrico e magnético.

2 Ondas de som e luz

O som é uma onda de pressão, semelhante à onda explosiva da figura 2. O som que ouvimos é produzido pelas variações de pressão nos nossos ouvidos. Como num gás existe uma relação entre a pressão e a temperatura, acontece que a velocidade v do som num gás aumenta com a temperatura de acordo com a relação:

$$v = \sqrt{AT} \tag{3}$$

onde A é uma constante que depende do tipo de gás, e T é a temperatura absoluta (em graus Kelvin).

No caso do ar, a constante K pode ser obtida sabendo que a 0° C (ou seja 273 K), a velocidade do som é de aproximadamente 331 m/s. Assim, a 15° C a velocidade do som no ar é de aproximadamente 340 m/s.

Outro exemplo de ondas são as ondas electromagnéticas. Nesse caso a grandeza física representada pela função de onda é o valor dos campos eléctrico e magnético. A velocidade de propagação dessas ondas é muito elevada: 3×10^8 m/s. A luz e as ondas de rádio são ondas electromagnéticas.

Uma diferença entre o som e a luz é que o som precisa de um meio para se propagar: se não houver ar, não podem existir variações de pressão. A luz propaga-se no vazio, pois os campos eléctrico e magnético podem existir no vazio. Outra diferença é que o som é uma onda longitudinal, enquanto que a luz é uma onda transversal: os campos eléctrico e magnético são perpendiculares à direcção de propagação.

3 Ondas harmónicas

Uma onda harmónica é uma onda com a forma de uma função seno ou co-seno, como na figura 3. A distância λ entre dois pontos consecutivos onde o deslocamento e a sua derivada têm o mesmo valor, é designada por **comprimento de onda** (por exemplo, a distância entre dois máximos ou mínimos consecutivos). O deslocamento máximo da onda, A, é a sua **amplitude**.

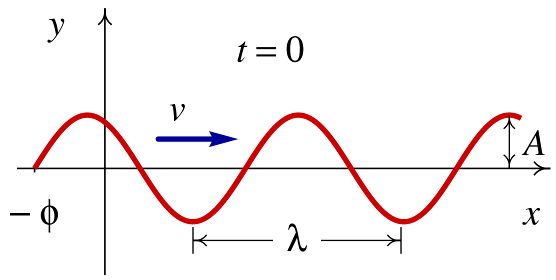


Figura 3: Onda harmónica.

O tempo que a onda demora a percorrer um comprimento de onda designa-se por **período**. O inverso do período é a frequência $f = 1/T$, que indica o número de comprimentos de onda que passam por um ponto, por unidade de tempo. No sistema SI a unidade da frequência é o hertz, representado pelo símbolo Hz, equivalente a s^{-1}.

Se v for a velocidade de propagação da onda e T o seu período, temos que

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \tag{4}$$

A equação da função na figura 3 é:

$$y(x) = A \sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda} + \phi\right)$$

onde a constante ϕ é a **costante de fase**. Essa função representa a forma da onda num instante inicial, que podemos admitir $t = 0$. Para obter a função de onda num instante diferente, teremos que substituir x por $x - vt$, já que a onda se propaga no sentido positivo do eixo dos x, com velocidade v

$$y(x,t) = A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) + \phi\right]$$

usando a relação entre a velocidade e o período (equação 4), podemos escrever

$$y(x,t) = A \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \phi\right] \tag{5}$$

Se substituirmos $x = 0$, obtemos a equação que descreve o movimento do ponto na origem, em função do tempo:

$$y(x) = A \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \phi\right)$$

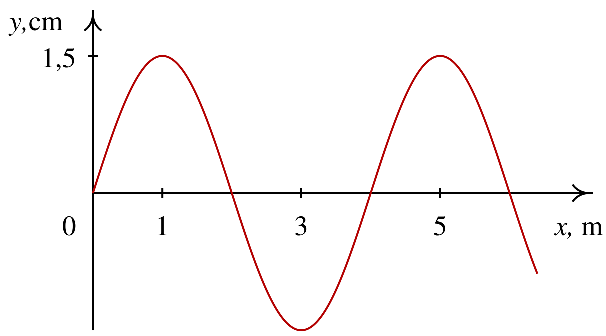
assim, o ponto na origem realiza um movimento harmónico simples, com período T e amplitude A. Outros pontos realizam o mesmo tipo de movimento, só que com diferentes constantes de fase.

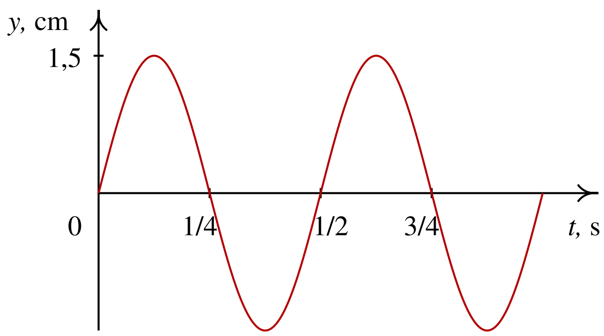
Exercício resolvido 1
Uma estação de rádio transmite na frequência de 100 MHz. Qual é o comprimento de onda dessas ondas?

Resolução: As ondas de rádio são ondas electromagnéticas, que se deslocam à velocidade de 3×10^8 m/s. O comprimento de onda calcula-se a partir da equação 4:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{100 \times 10^6\ \text{Hz}} = 3\ \text{m}$$

Exercício resolvido 2
*O primeiro gráfico mostra o deslocamento y em função da posição x, de uma onda harmónica, no instante $t = 0$, e o segundo gráfico mostra o deslocamento, em função do tempo, do ponto em $x = 4$ m. (*a*) Calcule a velocidade da onda. (*b*) Calcule a velocidade máxima do ponto em $x = 4$ m. (*c*) Diga em que sentido se descola a onda e escreva a sua equação.*





Resolução: (a) No primeiro gráfico concluimos que o comprimento de onda é 4 m, e o segundo gráfico mostra que o período é 1/2 segundo. A velocidade da onda harmónica é igual ao comprimento de onda dividido pelo período; assim, $v = 8$ m/s.

(b) A função representada no segundo gráfico é:

$$y(t) = 1{,}5\ \sin(4\pi t)$$

onde y é medida em cm e t em segundos. Essa função representa o deslocamento vertical do ponto em $x = 4$ m. Assim, a velocidade instantânea do ponto é a derivada dessa função

$$v_y(t) = -6\pi \cos(4\pi t)$$

em cm/s. O valor máximo dessa função obtem-se quando o co-seno for igual a -1. A velocidade máxima é

$$6\pi \ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 18{,}85 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

É de salientar que essa velocidade é na direcção do eixo dos y. Os pontos do meio deslocam-se nessa direcção, enquanto a onda se propaga na direcção do eixo dos x.

(c) Nos dois gráficos vemos que em $t = 0$ o deslocamento do ponto em $x = 4$ m é $y = 0$. Um instante mais tarde o deslocamento aumenta, como vemos no segundo gráfico. Isto é, o deslocamento passa a ser positivo, como era nos pontos à direita de $x = 4$ em $t = 0$. Podemos concluir que a onda se desloca para a esquerda.

A função de onda será a função representada no primeiro gráfico, substituindo x por $x + 8t$

$$y(x,t) = 1{,}5 \ \sin\left[\frac{2\pi}{4}(x + 8t)\right] = 1{,}5 \ \sin(\frac{\pi}{2}x + 4\pi t)$$

onde x é medida em metros, t em segundos e y em centímetros. Repare que para $x = 4$ obtem-se a mesma função que já obtivemos na alínea (b) para o deslocamento do ponto $x = 4$.

4 Ondas em duas e três dimensões

As ondas na superfície da água são ondas que se propagam em duas dimensões. As ondas de som e as ondas electromagnéticas propagam-se em três dimensões.

Se a fonte que produz as ondas for suficientemente pequena, podemos admitir que é uma fonte pontual. Como a onda se propaga em todas as direcções com a mesma velocidade v, os pontos onde a função de onda tiver o valor máximo formam esferas com centro na fonte, como se mostra na figura 4.

Essas esferas são chamadas **frentes de onda**. Por exemplo, no caso do som as frentes de onda são os pontos onde a pressão tem o valor máximo. O raio das frentes de onda aumenta, à medida que se afastam da fonte com velocidade v. Em cada intervalo de um período sai uma nova frente de onda a partir da fonte.

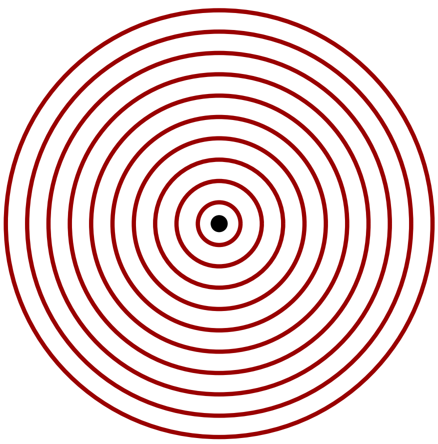


Figura 4: Frentes de onda produzidas por uma fonte pontual.

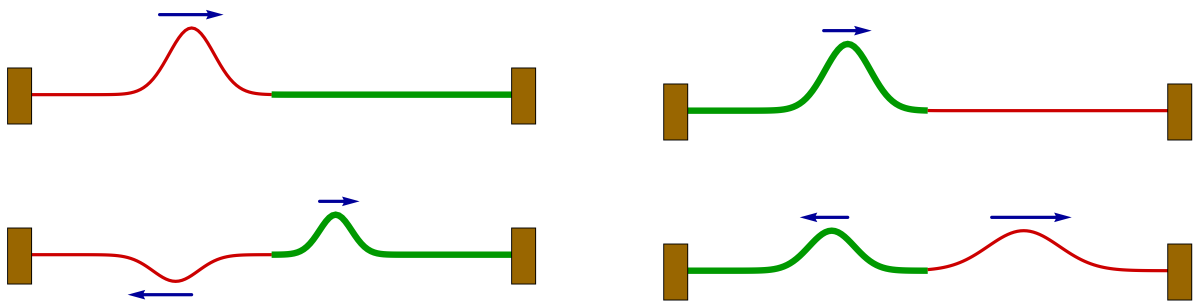


Figura 5: Onda a passar de uma corda com massa linear menor para outra com massa linear maior (esquerda), e de uma corda mais densa para outra menos densa (direita).

5 Reflexão e refracção das ondas

Imaginemos uma corda formada por duas partes com diferentes massas por unidade de comprimento. A velocidade da onda será maior no segmento da corda que tiver menor massa linear. Quando a onda atinge a fronteira entre os dois segmentos, uma parte da onda é reflectida regressando em sentido contrário, e outra parte é transmitida para o segundo segmento da corda.

Se o segmento onde se propaga inicialmente a onda for o que tem menor massa linear, a onda reflectida terá um deslocamento oposto ao da onda incidente (figura 5).

Quando a onda passa do segmento com maior massa linear para o segmento com menor massa linear, a deslocamento da onda reflectida é no mesmo sentido que a onda incidente.

A luz quando passa de um meio para outro, por exemplo do ar para a água, é também reflectida e refractada. A figura 6 mostra um raio luminoso que é reflectido e refractado na fronteira entre dois meios diferentes.

O ângulo que o raio incidente faz com a perpendicular à superfície de interface, é o **ângulo de incidencia**, θ_1 na figura. O ângulo que o raio reflectido faz com a perpendicular é o **ângulo de reflexão**, que é sempre igual ao ângulo de incidência θ_1.

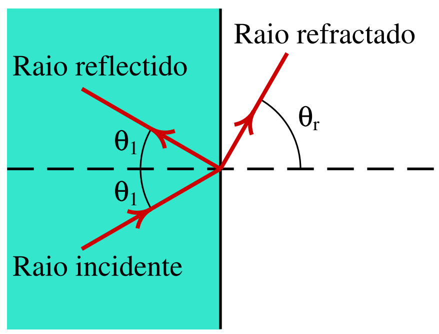


Figura 6: Reflexão e refracção da luz.

O ângulo entre o raio refractado e a normal é o **ângulo de refracção**, θ_2. Esse ângulo pode ser maior ou menor que o ângulo de incidência, para diferentes materiais. Cada material têm um índice de refracção n. A relação entre os senos dos ângulos de refracção e de incidência é igual à relação inversa entre os índices de refracção:

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{n_1}{n_2} \tag{6}$$

onde n_1 é o índice de refracção do primeiro meio e n_2 é o índice de refracção do segundo meio. Por exemplo, o índice de refracção do vidro, é aproximadamente 1,5, e o índice de refracção do ar é aproximadamente 1. Isso implica que quando a luz passa do ar para o vidro o ângulo de refracção é menor que o ângulo de incidência.

Quando a luz passa de um meio com maior índice de refracção para outro com menor índice, por exemplo do vidro ou da àgua para o ar, o ângulo de refracção é maior que o ângulo de incidência (como acontece na figura 6). Existe um valor do ângulo de incidência, designado de **ângulo crítico**, θ_c, para o qual o ângulo de refracção é igual a 90°. Isso quer dizer que o raio luminoso não passa para o segundo meio, mas é refractado ao longo da superfície entre os dois meios (figura 7).

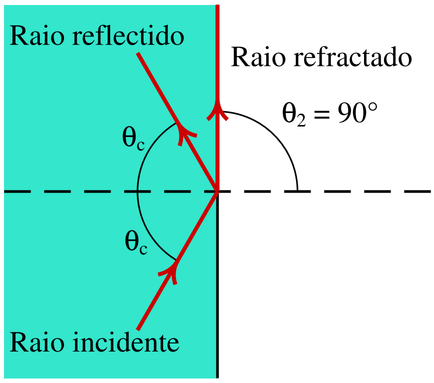


Figura 7: Ângulo crítico θ_c.

Se o ângulo de incidência for maior que o ângulo crítico, o raio luminoso já não é refractado mas é totalmente reflectido.

6 Efeito Doppler

Quando a fonte que produz uma onda estiver em movimento em relação ao meio onde a onda se propaga, os centros das diferentes frentes de onda não são o mesmo ponto, mas estarão no ponto onde estava a fonte quando a frente de onda foi emitida.

Assim, à frente da fonte as frentes de onda estarão mais perto umas das outras e detrás da fonte as frentes de onda estarão mais afastadas, como se mostra na figura 8.

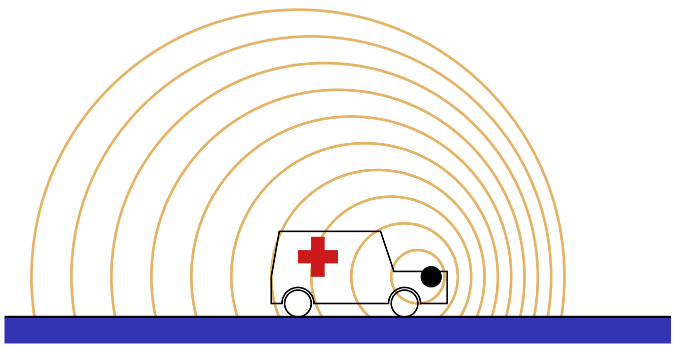


Figura 8: Efeito Doppler

Um observador que esteja à frente da fonte, receberá mais frentes de onda, por unidade de tempo, do que um observador que esteja detrás da fonte. O resultado é o aumento da frequência da onda recebida pelo primeiro observador e a diminuição da frequência da onda recebida pelo segundo observador. Esse efeito é designado por **efeito Doppler**.

No exemplo da ambulância da figura 8, quando a ambulância se aproxima de nós, ouvimos o sinal de emergência da ambulância mais agudo (frequência maior) e quando a ambulância se afasta, após passar pela nossa frente, ouvimos o som mais grave (menor frequência).

7 Ondas de choque

Se a velocidade da fonte for muito elevada, maior que a velocidade de propagação da onda, a fonte estará sempre por fora das frentes de onda, como se mostra na figura 9. As frentes de onda concentram-se dentro de um cone. Esse tipo de onda é designado de **onda de choque**.

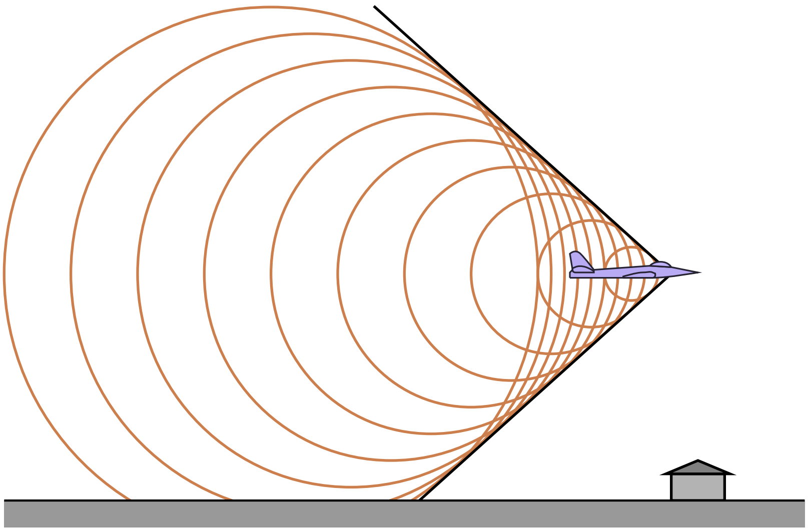


Figura 9: Ondas de choque.

Um avião supersónico é um avião que se desloca a velocidades maiores que a velocidade do som. Quando o avião passa por cima de nós, a uma velocidade maior que 340 m/s, não ouvimos o som imediatamente, porque as frentes de onda estão todas por detrás do avião. Uns instantes depois de ter passado o avião, somos atingidos pelo cone da onda de choque, e ouvimos um som muito intenso pois no cone concentram-se muitas frentes de onda.

8 Interferência e difracção

Quando existem varias ondas a propagarem-se no mesmo meio, a onda resultante é a sobreposição das ondas individuais. A função de onda resultante é a soma das funções de cada uma das ondas.

A figura 10 mostra duas ondas produzidas por duas fontes pontuais. Nos pontos onde se cruzam as frentes de onda das duas ondas, a onda resultante será máxima: **interferência construtiva**.

Em outros pontos uma das ondas têm o seu valor máximo, enquanto a outra tem o seu valor mínimo. Se a amplitude das duas ondas for a mesma, a onda resultante será nula nesses pontos: **interferência destrutiva**.

O fenómeno de **difracção** de uma onda, é a tendência que têm as ondas de contornar objectos. Quando uma onda bate contra um obstáculo com tamanho da ordem de grandeça do seu comprimento de onda, ou menor, a onda consegue atingir pontos atrás do obstáculo.

Por exemplo, as ondas de som têm comprimentos de onda da ordem dos decímetros. O som produzido por uma fonte pontual pode passar até pontos atrás de uma barreira de vários decímetros. No caso da luz visível, o comprimento de onda é na ordem das décimas de micrometros. Um objecto produz uma sombra bem definida (a luz não passa detrás do obstáculo), se tiver um tamanho muito maior do que esse comprimento de onda: milímetros, centímetros, metros, etc. Mas se o objecto tiver um tamanho de algumas décimas de micrómetro, já não projecta sombra.

9 Problemas

1. As órbitas de Marte e da Terra estão, aproximadamente, sobre o mesmo plano. A distância média de Marte ao Sol é de 229 Gm e a distância média da Terra ao Sol é de 150 Gm. Suponha que está em comunicação com um astronauta em órbita à volta de Marte, usando ondas electromagnéticas. Admita que o astronauta responde a uma pergunta sua imediatamente após ouvir a pergunta completa; quanto tempo tardará em chegar a resposta até si nas duas situações seguintes? (a) Quando Marte estiver em oposição ao Sol, isto é, a Terra encontra-se entre o Sol e Marte, na linha que passa pelos dois. (b) Quando Marte estiver em conjunção com o Sol, nomeadamente, o Sol está entre a Terra e Marte, na linha que passa pelos dois.

2. Uma onda de pressão propaga-se no sentido positivo do eixo dos x, com velocidade de 3 m/s. No instante $t = 0$, a pressão em função de x é dada pela função $P = \dfrac{1}{x^2 + 2}$ (unidades SI). Calcule a pressão P no ponto $x = 1$ m, no instante $t = 1$ s.

3. Uma onda harmónica com frequência de 80 Hz e amplitude igual a 0,025 m propaga-se numa corda, no sentido positivo do eixo dos x, com velocidade de 12 m/s. (a) Escreva uma função de onda apropriada para esta onda. (b) Encontre a velocidade máxima do ponto da corda que se encontra na posição $x = 1$ m. (c) Encontre a aceleração máxima do mesmo ponto considerado na alínea anterior.

4. Uma onda electromagnética plana propaga-se no sentido negativo do eixo dos y. Num dado instante $t = 0$ o valor do campo eléctrico é $E = E_0 \sin(2{,}25 \times 10^7 y)$, onde y é medido em metros. (a) Calcule o comprimento de onda. (b) Calcule a frequência.

5. Os índices de refracção da água e do ar são 1,333 e 1. Calcule o valor do ângulo crítico quando a luz passa da água para o ar.

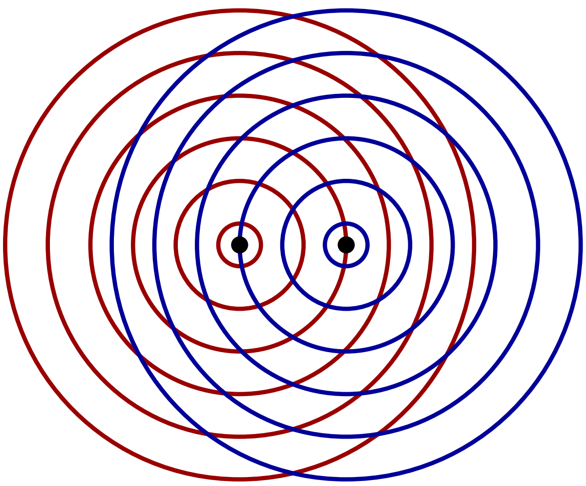


Figura 10: Interferência entre duas ondas produzidas por duas fontes pontuais.

6. A equação do deslocamento de uma partícula num meio onde se propaga uma onda harmónica é:

$$y(x,t) = \frac{2}{\pi}\sin\pi(x-4t)$$

(unidades SI). Calcule o módulo da velocidade de uma partícula no ponto $x = 10$ m, no instante $t = 2$ s

Respostas dos problemas

1. (a) 8,78 minutos (b) 42,11 minutos.

2. 1/6 Pa

3. (a) $y(x,t) = 0{,}025\sin(41{,}9\,x - 503\,t)$ (unidades SI). (b) 12,6 m/s (c) 6,33 km/s^2

4. (a) 279 nm. (b) $1{,}074 \times 10^{15}$ Hz.

5. 48,6°

6. 8 m/s